

Ejercicio 3.1

Considérese los siguientes juegos en forma estratégica. Determinar los equilibrios de Nash en estrategias puras:

		<u>J2</u>		
		I	C	D
<u>J1</u>	A	(7, 6)	(4, <u>8</u>)	(3, 4)
	M	(4, 1)	(3, <u>6</u>)	(4, 2)
	B	(5, 4)	(<u>6</u> , 5)	(3, 1)

↑
equil.

		<u>J2</u>		
		I	C	D
<u>J1</u>	A	(<u>3</u> , 3)	(<u>2</u> , <u>6</u>)	(3, 1)
	M	(2, 4)	(<u>2</u> , <u>4</u>)	(0, 4)
	B	(1, <u>5</u>)	(<u>2</u> , 3)	(<u>5</u> , 0)

equil. (2, 4)
(2, 6)

		<u>J2</u>		
		I	C	D
<u>J1</u>	A	(3, 2)	(1, <u>4</u>)	(2, 2)
	M	(1, <u>4</u>)	(3, 2)	(<u>2</u> , 3)
	B	(2, 3)	(1, 3)	(<u>2</u> , 3)

↑
equil.

Secuencia:
$$\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ (x, y) \end{pmatrix}$$

1) d_1 si d_2 elige!

2) d_2 si d_1 elige!

Ejercicio 3.2

Considérense cada uno de los siguientes juegos en forma estratégica. Averigüe, en función del parámetro a , bajo qué circunstancias existe un único equilibrio de Nash en estrategias puras.

a)

		<u>J2</u>	
		Izquierda	Derecha
<u>J1</u>	Alta	(4, 4)	(a, a)
	Baja	(2-a, 1)	(1, 3)

b)

		<u>J2</u>		
		Izquierda	Centro	Derecha
<u>J1</u>	Alta	(<u>4</u> , a)	(<u>3</u> , 1)	(<u>2</u> , 2)
	Baja	(<u>2</u> , 0)	(1, -3)	(a, 1)

a)

		<u>J2</u>	
		I	D
<u>J1</u>	A	(4, 4)	(a, a)
	B	(<u>2-a</u> , 1)	(1, 3)

Si $J_2 \rightarrow I \rightarrow J_1$:
 $\rightarrow 4 > 2-a$;
 $a = 2-4$; $a > -2$
 $\rightarrow 4 < 2-a \rightarrow \text{No}$

a , debe de ser
 $\left\{ \begin{array}{l} a > -2 \text{ y } a < 4 \\ \text{para que haya equil.} \\ \text{y elija } (4, 4) \end{array} \right.$

Si $J_1 \rightarrow A \rightarrow J_2 \rightarrow a > 4 \rightarrow \text{Si elige.}$
 $\rightarrow a < 4 \rightarrow \text{No}$

Si $J_1 \rightarrow B \rightarrow J_2 \rightarrow 3$

equil.

si $a < 2$

si $a < 2$

$a < 2$

Ejercicio 3.3

Consideremos el siguiente juego:

		J2	
		Izquierda	Centro
J1	A	(3, 2)	(1, 4)
	B	(1, 3)	(2, 1)
	C	(2, 2)	(2, 0)

$$E[J_1] = x \cdot A \cdot y^T$$

$$E[J_2] = x \cdot B \cdot y^T$$

Dadas las estrategias mixtas $x = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ e $y = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, obtener el pago esperado de ambos jugadores.

Pago J_1 : $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ Pago J_2 : $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$E[J_1] = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \right) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(2 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{6} \right)_{1 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \left(\frac{15}{18} + \frac{16}{18} \right)_{1 \times 1} = \frac{31}{18} \approx 1.72$$

$$E[J_2] = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \right) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \dots = \frac{47}{18} \approx 2.61$$

Ejercicio 3.4

Dos personas van a jugar a "pares o nones" solamente con la posibilidad de sacar uno o dos dedos cada uno. Si la suma de ambos es par el jugador A pagará un euro al jugador B. En caso contrario sería B el que pague a A. ¿Qué estrategia utilizaría el jugador A?

		J2 (B)		min	1 ≠ -1
		1d	2d		
J1 (A)	1d	(-1, 1)	(1, -1)	-1	maximin ≠ minmax No equi. puro → (Hacer estrategia mixta)
	2d	(1, -1)	(-1, 1)	-1	
max		1	1		

Para $J_1(A)$:

max v :

$$\left. \begin{array}{l} v \leq -x_1 + x_2 \\ v \leq x_1 + (-x_2) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} v \leq -x_1 + 1 - x_1 \\ v \leq x_1 - 1 + x_1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} v \leq -2x_1 + 1 \\ v \leq 2x_1 - 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_2 = 1 - x_1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Jug B habría que hacerlo tmb.

Pero da lo mismo ... $\rightarrow 50\%$ 1d
 $\rightarrow 50\%$ 2d

• Es repetir el proceso.

↓
la dual,
de 50%
 $\rightarrow 50\%$.

Jug A jugará $\rightarrow 50\%$ 1d
 $\rightarrow 50\%$ 2d

$$\begin{array}{l} -2x_1 + 1 = 2x_1 - 1 \\ 2 = 4x_1 \Rightarrow x_1 = 0.5 \\ x_2 = 0.5 \\ \downarrow \\ x_2 = 1 - x_1 \\ v = -x_1 + x_2 = -0.5 + 0.5 = 0 \end{array}$$

Ejercicio 3.5

Dos personas juegan a “piedra, papel o tijera”, de forma que el que gana obtiene 1€ del otro jugador y si empatan no hay recompensa (ni pago) para ninguno. Determinar si hay estrategias puras para el juego, y en caso contrario, plantear el problema de programación lineal que da lugar a las estrategias mixtas óptimas de cada uno de los jugadores.

J_1

	P_i	J_2 P_a	T_i
P_i	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
P_a	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
T_i	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

$J_1 \rightarrow J_1$

	P_i	P_a	T_i	min
P_i	0	-1	1	-1
P_a	1	0	-1	-1
T_i	-1	1	0	-1
max	1	1	1	

maximin = -1 $\neq$ 1 = minimax
No hay equil. puro $\rightarrow$ Estra.

Para J_1 :

max v :

$$\begin{aligned} v &\leq x_2 - x_3 \\ v &\leq -x_1 + x_3 \\ v &\leq x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Para J_2 (lo contrario) $\rightarrow$ es la dual

min w :

$$\begin{aligned} w &\geq -y_2 + y_3 \\ w &\geq y_1 - y_3 \\ w &\geq -y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\ y_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.6

Encuentre el equilibrio de Nash mediante la eliminación de estrategias dominadas en los siguientes juegos:

		<u>J2</u>	
		Izquierda	Derecha
<u>J1</u>	Alta	(4, 2)	(0, 1)
	Media	(1, 2)	(2, 4)
	Baja	(3, 3)	(4, 2)

$(4, 2)$ $(0, 1)$
 $(1, 2)$ $(2, 4)$
 $(3, 3)$ $(4, 2)$
 $\downarrow$
 $(4, 2)$
 $(3, 3)$

		<u>J2</u>		
		Izquierda	Centro	Derecha
<u>J1</u>	A	(3, 1)	(4, 2)	(1, 1)
	B	(2, 4)	(3, 5)	(4, 0)
	C	(1, 0)	(2, 1)	(0, 3)

$(3, 1)$ $(4, 2)$ $(1, 1)$
 $(2, 4)$ $(3, 5)$ $(4, 0)$
 $(1, 0)$ $(2, 1)$ $(0, 3)$
 $\downarrow$
 $(4, 2)$
 $(3, 5)$

max v :

$$v \leq x_2 - x_3$$

$$v \leq -x_1 + x_3$$

$$v \leq x_1 - x_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \rightarrow x_2 = (1 - x_1 - x_3)$$

$$x_n \geq 0$$

max v :

$$v \leq (1 - x_1 - x_3) - x_3$$

$$v \leq -x_1 + x_3$$

$$v \leq x_1 - 1 + x_1 + x_3$$

$$x_n \geq 0$$

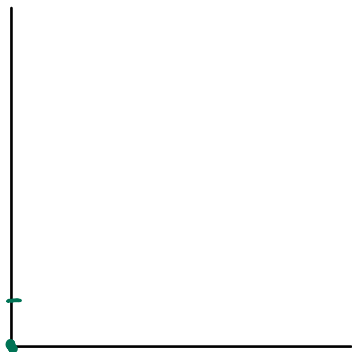
max v :

$$v \leq 1 - x_1 - 2x_3$$

$$v \leq -x_1 + x_3$$

$$v \leq -1 + x_3$$

$$x_n \geq 0$$



$$1 - x_1 - 2x_3 = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x_1 & x_3 & \\ \hline 1 & -2 & 0 \end{array} \quad (0,0) \quad (1,0) \quad (1,0)$$

Ah cono, esto

es la 1ª Pente
xD

(no lo puede pedir
aquí)

Ejercicio 3.7

Considerar el siguiente juego cooperativo con tres jugadores:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = 2$$

$$v(\{1, 3\}) = 3$$

$$v(\{2, 3\}) = 2$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 5$$

- (a) Describir las condiciones que deben cumplir las imputaciones.
(b) Obtener el valor de Shapley.

Sol: a) $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. b) (1.83, 1.33, 1.83)

S
 0
 2
 3

$v(S)$
 0
 2
 3
 5

$P_3(S)$
 $1/3$
 $1/6$
 $1/6$
 $1/6$
 $1/3$
 $1/3$
 $1/3$

x_1
 0
 $-$
 2
 3
 $-$
 $-$
 3

x_2
 0
 2
 $-$
 2
 $-$
 2
 $-$

x_3
 0
 3
 2
 $-$
 3
 $-$
 $-$

$1/3$
 $1/6$
 $1/6$
 $1/6$
 $1/3$
 $1/3$
 $1/3$

$1/4$
 $1/4$
 $1/4$
 $1/4$

Estos de Shapley se hacen todos

⇒ repasarlos con los solos.

Repasar estos + los de exáms.

↓
los de exáms de la Teoría de Jue.

Valor Shapley. $P_n = \frac{n! (n-1)!}{n!}$

S	v(S)	P ₃ (S)	x ₁	x ₂	x ₃
∅	0	1/3	0	0	0
{1}	0	1/6	-	2	3
{2}	0	1/6	2	-	2
{3}	0	1/6	3	2	-
{1,2}	2	1/3	-	-	3
{1,3}	3	1/3	-	2	-
{2,3}	2	1/3	3	-	-
{1,2,3}	5		$\frac{1/6}{3} \cdot 100 = 36.6\%$	$\frac{4/1}{3} \cdot 100 = 26.6\%$	$\frac{1/6}{3} \cdot 100 = 36.6\%$

Ejercicio 3.8

Una finca rustica está valorada por su actual propietario en 350.000 euros. Un empresario le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 700.000 euros. Una empresa constructora le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor de la finca sería 775.000 euros. Obtener el valor Shapley del juego.

Sol: $x = (620833.333, 58333.333, 95833.333)$

Actual prop 350.000, Uno acondiciona 700.000, Emp constru 775.000

S	v(S)	P ₃ (S)	x ₁	x ₂	x ₃
∅	0	1/3	350.000	0	0
{1}	350.000	1/6	-	350.000	425.000
{2}	0	1/6	700.000	-	0
{3}	0	1/6	775.000	0	-
{1,2}	700.000	1/3	-	-	75.000
{1,3}	775.000	1/3	-	0	-
{2,3}	0	1/3	775.000	-	-
{1,2,3}	775.000		$\frac{620833.333}{775000} \cdot 100 = 80.11\%$	$\frac{58333.333}{775000} \cdot 100 = 7.53\%$	$\frac{95833.333}{775000} \cdot 100 = 12.33\%$

Ejercicio 3.9

En un departamento hay tres investigadores consolidados que trabajan en la misma línea de investigación. Se disponen a presentar solicitudes para optar a financiación de proyectos de investigación. Han preguntado a una persona de confianza que tiene toda la información sobre criterios y candidatos y les ha comentado lo que es previsible que ocurra con la resolución acerca de las posibles solicitudes, a la vista del historial y méritos de los candidatos. Si el doctor Clapés presenta de manera individual la solicitud, lo previsible es que le concedan treinta mil euros, el doctor Salmo no conseguirá nada si va solo, mientras que la doctora Luján conseguirá individualmente cincuenta mil euros. Si los doctores Clapés y Salmo presentan un proyecto conjunto obtendrán una financiación de 50, Clapés y Luján obtendrán 80, y Salmo y Luján obtendrán también 80 (siempre en miles de euros). Si los tres investigadores solicitan el proyecto de manera conjunta, previsiblemente obtendrán 100. Cada investigador solo puede figurar en una solicitud. Obtener el valor Shapley del juego.

Sol: $x = (30, 15, 55)$

9. 1 Dr. Clapés solo 30.000
2 Dr. Salmo nada solo
3 Dr. Luján solo 50.000

50.000
80.000
80.000
100.000

S	$v(S)$	$P_3(S)$	X_1	X_2	X_3
$\emptyset$	0	$1/3$	30.000	0	50.000
$\{1\}$	30.000	$1/6$	-	20.000	50.000
$\{2\}$	0	$1/6$	50.000	-	80.000
$\{3\}$	50.000	$1/6$	30.000	30.000	-
$\{1,2\}$	50.000	$1/3$	-	-	50.000
$\{1,3\}$	80.000	$1/3$	-	10.000	-
$\{2,3\}$	80.000	$1/3$	20.000	-	-
$\{1,2,3\}$	100.000		30.000	15.000	55.000

Respecto a esto!

30% 15% 55%

Ejercicio 3.10

Una familia posee una antigüedad que no tiene valor para ésta. Un amigo del padre aficionado a las antigüedades le dice que él podría venderla utilizando sus contactos por 500€. Sin embargo, la madre, que no se fía, ha decidido consultar entre sus vecinas, y una de ellas le ofrece 750€. Si utilizando los dos contactos, la familia podría obtener hasta 1000€. ¿cómo deberían repartirse los beneficios obtenidos de la venta de la antigüedad entre la familia, el amigo del padre y la vecina según el valor de Shapley?

Sol: $x = (541.667, 166.667, 291.667)$

10 Familia con antigüedad sin valor para ella. Amigo dice que puede vender persona.

La madre por 750. Utilizando ambos contactos 1000€. Valor Shapley.

S	$v(S)$	$P_3(S)$	X_1	X_2	X_3
$\emptyset$	0	$1/3$	0	0	0
$\{1\}$	0	$1/6$	-	500	750
$\{2\}$	0	$1/6$	500	-	0
$\{3\}$	0	$1/6$	750	0	-
$\{1,2\}$	500	$1/3$	-	-	500
$\{1,3\}$	750	$1/3$	-	250	-
$\{2,3\}$	0	$1/3$	1000	-	-
$\{1,2,3\}$	1000		541.6	166.6	291.6

541.6% 166.6% 291.6%

Ejercicio 3.11

Cuatro amigos de la carrera han creado una empresa y pretenden repartirse los beneficios obtenidos el primer año. De los cuatro amigos, hay uno sin el cual no hubiera sido posible obtener beneficios. Estando éste en el equipo, se hubieran obtenido 1000, 2000, 3000 ó 4000 €, dependiendo de si los subgrupos tienen 1, 2, 3 ó 4 miembros, respectivamente. ¿Qué beneficio debería llevarse el jugador imprescindible en este reparto según el valor de Shapley?

11 4 amigos de la carrera, 1 imprescindible por ejemplo 3. Con valores de 1000, 2000, 3000 u 4000, dependiendo si son 1, 2, 3 o 4 el valor shapley?

S	v(S)	$P_H(S)$	X_1	X_2	X_3	X_4
$\emptyset$	0	1/4	0	0	1000	0
$\{1\}$	0	1/12	-	0	2000	0
$\{2\}$	0	1/12	0	-	2000	0
$\{3\}$	1000	1/12	1000	1000	-	1000
$\{4\}$	0	1/12	0	0	2000	-
$\{1,2\}$	0	1/11	-	-	1000	0
$\{1,3\}$	2000	1/12	-	1000	-	1000
$\{1,4\}$	0	1/12	-	0	3000	-
$\{2,3\}$	2000	1/12	1000	-	-	1000
$\{3,4\}$	0	1/12	0	-	3000	-
$\{3,4\}$	2000	1/12	1000	1000	-	-
$\{1,2,3\}$	3000	1/4	-	-	-	1000
$\{1,2,4\}$	0	1/11	-	-	4000	-
$\{1,3,4\}$	3000	1/11	-	1000	-	-
$\{2,3,4\}$	3000	1/11	1000	-	-	-
$\{1,2,3,4\}$	4000				$\frac{1000}{1000} = 100\%$ $\frac{1000}{1000} = 100\%$ $\frac{1000}{1000} = 100\%$ $\frac{1000}{1000} = 100\%$ 62.5%	

Solo hace falta este ps porque fue
veraz se lleva el imprescindible

Ejercicios de Exámenes.

1ero Teoría Juegos

(2 pts.) 4 Calcula los equilibrios (puros y/o mixtos) de Nash para el Jugador B y el valor del juego del siguiente problema de decisión.

		Empresa B			
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
Empresa A	A ₁	(15, -15)	(-15, 15)	(60, -30)	(12, -40)
	A ₂	(-20, 30)	(15, -10)	(30, 50)	(20, -20)
	A ₃	(-10, 10)	(20, -20)	(10, 25)	(30, -30)

4 Equilibrio de Nash para B y valor del juego.

		Emp B			
		B1	B2	B3	B4
Emp A	A1	(15, -15)	(-15, 15)	(60, -30)	(12, -40)
	A2	(-20, 30)	(15, -10)	(30, 50)	(20, -20)
	A3	(-10, 10)	(20, -20)	(10, 25)	(30, -30)

		B1	B2	B3	B4
A1	A1	(15, -15)	(-15, 15)	(60, -30)	(12, -40)
	A3	(-10, 10)	(20, -20)	(10, 25)	(30, -30)

		Emp B		
		B1	B2	MIN
A1	A1	15	-15	-15
	A3	-10	20	-10
MAX		15	20	

Como $\min_{\max} \neq \max_{\min} \rightarrow$ no equilibrio puro.

Para emp A

$$\begin{aligned}
 \max_x v \\
 \text{s.t. } v &\leq 15x_1 - 10x_2 \\
 v &\leq -15x_1 + 20x_2 \\
 x_1 + x_2 &= 1 \\
 x_0, x_1 &\geq 0
 \end{aligned}
 \rightarrow
 \begin{aligned}
 \max_x v \\
 \text{s.t. } v &\leq 15x_1 - 10(1-x_1) \\
 v &\leq -15x_1 + 20(1-x_1) \\
 0 &\leq x_1 \leq 1
 \end{aligned}
 \rightarrow
 \begin{aligned}
 \max_x v \\
 \text{s.t. } v &\leq 25x_1 - 10 \\
 v &\leq -35x_1 + 20 \\
 0 &\leq x_1 \leq 1
 \end{aligned}$$

Para emp B

$$\begin{aligned}
 \min_y w \\
 w &\geq 15y_1 - 15y_2 \\
 w &\geq -10y_1 + 20y_2 \\
 y_1 + y_2 &= 1 \\
 y_1, y_2 &\geq 0
 \end{aligned}
 \rightarrow
 \begin{aligned}
 \min_y w \\
 w &\geq 5y_1 - 15(1-y_1) \\
 w &\geq -10y_1 + 20(1-y_1) \\
 0 &\leq y_1 \leq 1
 \end{aligned}
 \rightarrow
 \begin{aligned}
 \min_y w \\
 w &\geq 30y_1 - 15 \\
 w &\geq -30y_1 + 20 \\
 0 &\leq y_1 \leq 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 30y_1 - 15 &= -30y_1 + 20 \Rightarrow 30y_1 + 30y_1 = 20 + 15 \Rightarrow 60y_1 = 35 \Rightarrow y_1 = \frac{35}{60} = \frac{7}{12} \\
 y_2 &= 1 - y_1 = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12} \\
 \text{El valor del juego } w &= 2.5 \rightarrow \text{lo que pierde B.}
 \end{aligned}$$

(2 pts.) 1. Calcula los equilibrios (puros y/o mixtos) de Nash para el Jugador B y el valor del juego del siguiente problema de decisión.

		Jugador B		
		B ₁	B ₂	B ₃
Jugador A	A ₁	(15, -15)	(-20, 30)	(-10, 10)
	A ₂	(-15, 15)	(15, -10)	(20, -20)
	A ₃	(60, -30)	(30, -50)	(10, -25)
	A ₄	(12, -40)	(20, -20)	(30, -30)

1. Calcular equilibrios para jugador B, y valor del juego.

		JB		
		B ₁	B ₂	B ₃
JA	A ₁	(15, -15)	(-20, 30)	(-10, 10)
	A ₂	(-15, 15)	(15, -10)	(20, -20)
	A ₃	(60, -30)	(30, -50)	(10, -25)
	A ₄	(12, -40)	(20, -20)	(30, -30)

		B ₂	B ₃
A ₃	A ₃	(30, -50)	(10, -25)
	A ₄	(20, -20)	(30, -30)

Con parámetros Buscar ← ord. 2025

1. Calcular el equilibrio y el valor del juego para J₂ del juego de suma nula:

		J ₂		
		a	b	c
J ₁	A	20	15	15
	B	6	9	12
	C	22	-10	9
MINIMAX		22	15	15

MAXIMIN
MINIMAX
Equilibrio (A, c)

J₂ → Pérdidas

M.C. W

$$20y_1 + 15y_2 \leq W$$

$$22y_2 + 9y_3 \leq W$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$y_2 = 1 - y_1$$

$$20y_1 + 15(1 - y_1) \leq 20y_1 - 15y_1 + 15$$

$$22y_1 + 9(1 - y_1) \leq 22y_1 + 9 - 9y_1$$

$$5y_1 + 15 = 13y_1 + 9$$

$$6 = 8y_1$$

$$y_1 = 6/8$$

$$y_2 = -0.3068$$

3 (2 puntos) Dado el siguiente juego bipersonal de suma nula:

20	15	5α
$-\frac{\alpha}{2}$	12	25
25	9	-10

$$25 > 5\alpha \rightarrow 5 > \alpha$$

$$-\frac{\alpha}{2} < 25$$

$$-25 < \frac{\alpha}{2} \rightarrow -50 < \alpha$$

$$5 < \alpha < 50$$

(a) Determinar los valores de α para los que el siguiente juego de suma nula no tiene equilibrios puros.

(b) Calcular el equilibrio de Nash para el primer jugador y el valor del juego cuando $\alpha = 5$.

b)

	A	B	C	min (maximin)
a	(20, -20)	(15, -15)	(25, -25)	15
b	($-\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$)	(12, -12)	(25, -25)	$-\frac{\alpha}{2} \rightarrow 15$
c	(25, -25)	(9, -9)	(-10, 10)	-10
max minimas	20	15	25	

Se cubren todos, no se puede hacer estrategias dominadas.

Hay equilibrio en (a, B)

Y este es el valor de juego.

minimax = minimin $\rightarrow$ Equilibrio

puro, no hacer falta estrat. mixta

③

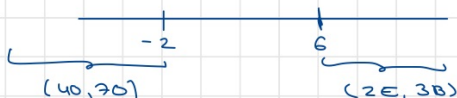
	3 BASTOS	5 COPAS	7 OROS
2 Espadas	(K, 1)	(4, -4)	(2, -5)
4 OROS	(6, -6)	(-3, 3)	(5, 1-K)

→ muy fácil pero repasar.

a)

- $K > 6, 1 > -4$ (2E, 3B)
- $C > K, -6 \neq 3$ NO HAY (4O, 3B)
- $5 > 2, 1-K > 3$ (4O, 7O)
- $2 \neq 5$ (2E, 7O) NO HAY

$$1-3 > K \rightarrow -2 > K \rightarrow K < -2$$



Sol: No hay equilibrio en $-2 < K < 6$

6)

		J_2		
		3 BASTOS	5 COPAS	7 OROS
J_1	2 Espadas	$(-1, 1)$	$(4, -4)$	$(2, -5)$
	4 OROS	$(6, -6)$	$(-3, 3)$	$(5, 2)$

		J_2		
		3 BASTOS	5 COPAS	min
J_1	2 Espadas	$(-1, 1)$	4	-1
	4 OROS	6	-3	-3
may		6	4	

esto lo impongo...
 $-1 > -3$
 minimax $\neq$ maximin
 No equilibrio (valor juego.) May que hacer estrategia mixta.

J_2

Max. v

$$\text{s.a. } -x_1 + 6x_2 \geq v$$

$$4x_1 - 3x_2 \geq v$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$-x_1 + 6(1-x_1) = 4x_1 - 3(1-x_1)$$

$$-x_1 + 6 - 6x_1 = 4x_1 - 3 + 3x_1$$

$$-7x_1 + 6 = 7x_1 - 3$$

$$a = 14x_1$$

$$x_1 = \frac{a}{14}$$

$$64'29\%$$

$$4 \cdot \frac{a}{14} - 3 \cdot \frac{5}{14} = \frac{3}{2} = v$$

$$x_2 = 1 - a/14 = \frac{5}{14} \quad 35'71\%$$

4)

	Sofa	Caballo	Pera
Reis	$(a, 1)$	$(6, -6)$	$(2, -a)$
As	$(2, -2)$	$(-5, 5)$	$(5, 1-a)$

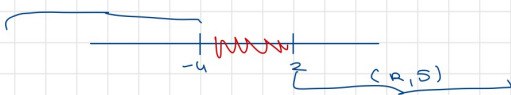
Si aquí

(=)

a) $\begin{cases} a > 2, 1 > -a & (\text{Reis, Sofa}) \\ 2 > a, -2 \geq 5 & \text{NO HAY (As, Sofa)} \end{cases}$

$\begin{cases} 2 \neq 5, -a > -6 & (\text{Reis, Pera}) \text{ NO HAY} \\ 5 > 2, 1-a > 5 & (\text{As, R}) \\ & -4 > a \end{cases}$

Si aquí si



Si $x < -4 \rightarrow (\text{As, R})$

Si $x > 2 \rightarrow (\text{R, S})$

Juntar

Dominados

4)

b)

	Sofa	Caballo	Pera	min
Reis	$(-1, 1)$	$(6, -6)$	$(2, -a)$	-1
As	$(2, -2)$	$(-5, 5)$	$(5, 2)$	-5

max | 2 6

No es un punto. Es una línea mixta.

Max. V

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & -x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ & 6x_1 - 5x_2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} x_2 &= 1 - x_1 \\ -x_1 + 2(1 - x_1) &= 6x_1 - 5(1 - x_1) \\ -x_1 + 2 - 2x_1 &= 6x_1 - 5 + 5x_1 \\ -3x_1 + 2 &= 11x_1 - 5 \\ 7 &= 14x_1 \\ x_1 &= \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \\ x_2 &= 1 - \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

Min. W

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & -y_1 + 6y_2 \leq W \\ & 2y_1 - 5y_2 \leq W \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} y_2 &= 1 - y_1 \\ -y_1 + 6(1 - y_1) &= 2y_1 - 5(1 - y_1) \\ -y_1 + 6 - 6y_1 &= 2y_1 - 5 + 5y_1 \\ -7y_1 + 6 &= 7y_1 - 5 \\ 11 &= 14y_1 \\ y_1 &= \frac{11}{14} \\ -\frac{11}{14} + 6 \cdot \frac{3}{14} &= \frac{1}{14} = V \\ y_2 &= 1 - \frac{11}{14} = \frac{3}{14} \end{aligned} \right\}$$

Shapley extras

(2 pts.) **2** Cuatro amigos (Fito, Fede, Fran y Fabio) han creado una empresa y pretenden repartirse los beneficios obtenidos tras el primer año. La empresa no habría tenido beneficios si no hubieran estado Fito y Fabio ó Fede y Fran. Fede y Fran se conocían de la carrera y ya contaban con contactos como para haber obtenido 2000€ de beneficios. Igualmente Fito y Fabio, juntos ya podrían haber ganado 3200€. Uniéndose a una de estas dos parejas, las coaliciones habrían obtenido 4500€ ó 6500€, dependiendo de si las coaliciones tienen a 3 ó 4 de los amigos. ¿Qué beneficio debería llevarse Fede según el valor de Shapley? ¿Y Fito?

2. Fito, Fede, Fran y Fabio. Emp sin benef si no este: Fito y Fabio o Fede y Fran
 Fede y Fran 2000. Fito y Fabio 3200. Si unen 4500, Fede 6500. ¿Benef Fede y Fito?

$P = \frac{n!}{s!(n-s)!}$

S	$v(S)$	$P_S(S)$	$n!$ X_1	X_2	X_3	X_4
$\emptyset$	0	1/4	0	0	0	0
{1}	0	1/12	-	0	0	3200
{2}	0	1/12	0	-	2000	0
{3}	0	1/12	0	2000	-	0
{4}	0	1/12	3200	0	0	-
{1,2}	0	1/12	-	-	4500	4500
{1,3}	0	1/12	-	4500	-	4500
{1,4}	3200	1/12	-	1300	1300	-
{2,3}	2000	1/12	2500	-	-	2000
{2,4}	0	1/12	4500	-	4500	-
{3,4}	0	1/12	4500	4500	-	-
{1,2,3}	4500	1/4	-	-	-	2000
{1,2,4}	4500	1/4	-	-	2000	-
{1,3,4}	4500	1/4	-	2000	-	-
{2,3,4}	4500	1/4	2000	-	-	-
{1,2,3,4}	6500		125 6500	125 6500	125 6500	125 6500

$\frac{125}{6500} \cdot 100 = 1.92\%$
 $\frac{125}{6500} \cdot 100 = 1.92\%$
 $\frac{125}{6500} \cdot 100 = 1.92\%$
 $\frac{125}{6500} \cdot 100 = 1.92\%$

$$\frac{1}{12} (3200 + 2500 + 4500 + 4500) + \frac{1}{4} 2000$$

Fito

Fede

(2 pts.) **3** Cuatro amigos (Fito, Fede, Fran y Fabio) han creado una empresa y pretenden repartirse los beneficios obtenidos tras el primer año. La empresa no habría tenido beneficios si no hubieran estado Fito y Fabio ó Fede y Fran. Fede y Fran se conocían de la carrera y ya contaban con contactos como para haber obtenido 2200€ de beneficios. Igualmente Fito y Fabio, juntos ya podrían haber ganado 1750€. Uniéndose a una de estas dos parejas, las coaliciones habrían obtenido 4500€ ó 6500€, dependiendo de si las coaliciones tienen a 3 ó 4 de los amigos. ¿Qué beneficio debería llevarse Fran según el valor de Shapley? ¿Y Fabio?

3 Fito, Fede, Fran y Fabio, Fede y Fran = 2200 Fito y Fabio = 1750

Uniéndose 4500, todos 6500 Benef. Fran y Fabio

S	v(S)	P(S)	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
∅	0	1/4	0	0	0	0
{1}	0	1/11	-	0	0	1750
{2}	0	1/12	0	-	2200	0
{3}	0	1/12	0	2200	-	0
{4}	0	1/12	1750	0	0	-
{1,2}	0	1/12	-	-	4500	4500
{1,3}	0	1/12	-	4500	-	4500
{1,4}	1750	1/12	-	2250	2250	-
{2,3}	2200	1/12	2300	-	-	2300
{2,4}	0	1/12	4500	-	4500	-
{3,4}	0	1/12	4500	4500	-	-
{1,2,3}	4500	1/4	-	-	-	2000
{1,2,4}	4500	1/4	-	-	2000	-
{1,3,4}	4500	1/4	-	2000	-	-
{2,3,4}	4500	1/4	2000	-	-	-
{1,2,3,4}	6500		$\frac{1587.5}{6500} \cdot 100$	$\frac{1662.5}{6500} \cdot 100$	$\frac{1662.5}{6500} \cdot 100$	$\frac{1587.5}{6500} \cdot 100$
			24.42%	25.57%	25.57%	24.42%

(2 pts.) 1 Cuatro amigos (Fito, Fede, Fran y Fabio) han creado una empresa y pretenden repartirse los beneficios obtenidos tras el primer año. La empresa no habría tenido beneficios si no hubieran estado Fito y Fran ó Fede y Fabio. Fede y Fabio se conocían de la carrera y ya contaban con contactos como para haber obtenido 2200€ de beneficios. Igualmente Fito y Fran, juntos ya podrían haber ganado 1750€. Uniéndose a una de estas dos parejas, las coaliciones habrían obtenido 4500€ ó 6500€, dependiendo de si las coaliciones tienen a 3 ó 4 de los amigos. ¿Qué beneficio debería llevarse Fran según el valor de Shapley? ¿Y Fede?

1. Fito, Fede, Fran y Fabio. Fede y Fabio = 2200 Fito y Fran = 1750

Se une el es 4500, y todos 6500 ¿Fran y Fede?

S	v(S)	P(S)	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
∅	0	1/4	0	0	0	0
{1}	0	1/12	-	0	1750	0
{2}	0	1/12	0	-	0	2200
{3}	0	1/12	1750	0	-	0
{4}	0	1/12	0	2200	0	-
{1,2}	0	1/12	-	-	4500	4500
{1,3}	1750	1/12	-	1750	-	1750
{1,4}	0	1/12	-	4500	4500	-
{2,3}	0	1/12	4500	-	-	4500
{2,4}	2200	1/12	2200	-	2200	-
{3,4}	0	1/12	4500	4500	-	-
{1,2,3}	4500	1/4	-	-	-	2000
{1,2,4}	4500	1/4	-	-	2000	-
{1,3,4}	4500	1/4	-	2000	-	-
{2,3,4}	4500	1/4	2000	-	-	-
{1,2,3,4}	6500		$\frac{1581.5}{6500} \cdot 100$	$\frac{1662.5}{6500} \cdot 100$	$\frac{1782.5}{6500} \cdot 100$	$\frac{1662.5}{6500} \cdot 100$
			24.42%	25.57%	27.41%	25.53%
			Fede	Fran		

4 (2 puntos) Tres amigos, ¹Laura, ²Joaquín y ³Sara, han creado una empresa y pretenden repartirse los beneficios obtenidos el primer año. La empresa no habría tenido beneficios si no hubieran estado Joaquín y Sara (juntos) o Laura (sola). Joaquín y Sara se conocían de la carrera y ya contaban con contactos como para haber obtenido 2300€ de beneficios. Laura, que tiene gran iniciativa hubiera ganado sólo 1500€. Además, Joaquín hubiera hecho ganar 2500€ conjuntamente con Laura, mientras que Sara con Laura habrían ganado 3000€. ¿Qué beneficio debería llevarse Laura según el valor de Shapley de los 4000€ que han obtenido los tres?

S	V	$P_2(S)$	Σ
$V \{1\}$	0	1/3	1500
$V \{1,1\}$	1500	1/6	—
$V \{2\}$	0	1/6	2500
$V \{1,3\}$	0	1/6	3000
$V \{1,2\}$	2500	1/3	⊖
$V \{1,3\}$	3000	1/3	⊖
$V \{2,3\}$	2300	1/3	1700
$V \{1,2,3\}$	4000		1983'33

Respecto Laura (S): Si hay 3, siempre $\rightarrow \frac{1}{3}$ si hay 4...
Shapley $\rightarrow P_n(S) = \frac{S! \cdot (n-s-1)!}{n!}$
3 jug $\rightarrow P_3(S) = \frac{S! \cdot (3-s-1)!}{3!}$
 $\leftarrow (1,2,3) = 4000 - 2300 = 1700$
 $\quad \quad \quad (1,2,3)$ $\quad \quad \quad 2,3$
49'58% de beneficio

$$1500 \times \frac{1}{3} + 2500 \times \frac{1}{6} + 3000 \times \frac{1}{6} + 1700 \times \frac{1}{3} =$$

$$= 500 + 416'66... + 500 + 566'666$$

$$= 1000 + 983'33 = \boxed{1983'33}$$

Sólo 1

$$P_n(\emptyset) = \frac{0! \cdot (3-0-1)!}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P_n(\{1\}) = \frac{1! \cdot (3-1-1)!}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$P_n(\{1,2\}) = \frac{2! \cdot (3-2-1)!}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Regla 3 } 4000 — 100% $\leftarrow$ De los 4000 obtenidos por los 3.

1983'33 — 49'58%

Si esto es lo obtenido por Laura.

Se tiene que llevar 49'58% del beneficio según lo que ella aporta.

→ 1, 2, 3

Por ej. son los imprescindibles

2 (1 punto) Tres amigos de la carrera han creado una empresa y pretenden repartirse los beneficios obtenidos el primer año. De los tres amigos, hay dos sin los cuales no hubiera sido posible obtener beneficios. Estando ambos en el equipo, se hubieran obtenido 3000€ ó 4000€, dependiendo de si los subgrupos tienen 2 ó 3 miembros, respectivamente. ¿Qué beneficios deberían llevarse los jugadores no imprescindibles en este reparto según el valor de Shapley?

(3)

$n = 3$

$$\text{Shapley} \rightarrow P_n(S) = \frac{s! \cdot (n-s-1)!}{n!}$$

$$P_3(\emptyset) = \frac{0! \cdot (3-0-1)!}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P_3(1, 2) = \frac{1! \cdot (3-1-1)!}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$P_3(1, 2, 3) = \frac{2! \cdot (3-2-1)!}{3!} = \frac{1}{3}$$

S	V	$P_3(S)$
$V(\emptyset)$	0	$1/3$
$V(1, 2)$	0	$1/6$
$V(1, 3)$	0	$1/6$
$V(2, 3)$	0	$1/6$
$V(1, 2, 3)$	3	$1/3$

S	V	$P_3(S)$	V_3 (No imprescind)
$V \emptyset \emptyset$	0	$1/3$	0
$V \emptyset 1 \emptyset$	0	$1/6$	0
$V \emptyset 2 \emptyset$	0	$1/6$	0
$V \emptyset 3 \emptyset$	0	$1/6$	0
$V \emptyset 1, 2 \emptyset$	3	$1/3$	$4000 - 3000 = 1000$
$V \emptyset 1, 3 \emptyset$	0	$1/3$	—
$V \emptyset 2, 3 \emptyset$	0	$1/3$	—
$V \emptyset 1, 2, 3 \emptyset$	4	$1/3$	$1000 \times \frac{1}{3} = 333'33$

No se pone!

jug 3.

Es decir: V_3

100% — 4000

8'33% — 333'33

El resto, es decir el 91'67%.

se lo reparten entre el

J_1 y J_2 a partes iguales p.e. reparten lo mismo

$$J_1: 4000 \times \frac{91'67\%}{2} = 1833'33$$

$$J_2: 4000 \times \frac{91'67\%}{2} = 1833'33$$